جامعة الملك خالد

الكلية التطبيقية

برنامج الادارة

مقرر

رياضيات الأعمال

١٣٢٢ كمى٣

د محمود سليم

رياضيات الاعمال Business Mathematics

- اسم المقرر ورمزه: رياضيات الاعمال - ١٣٢٢كمي-٣
- طالبات: الكلية التطبيقة بالمجاردة
- السنة: الثانية - المستوى الثالث
- الوحدات الدراسية: ساعتات
- متطلبات سابقة: لا يوجد

فهرس الموضوعات

الوحدة الأولي: الدوال وتطبيقاتها
The Function and it's Applications

- أهداف الوحدة:

بنهاية هذه الوحدة ستكون قادرا على:

- ❑ تحديد مفهوم وأنواع الدوال .
- ❑ حل أنظمة الدوال المختلفة .
- ❑ توظيف الدوال في حل المشكلات الاقتصادية والإدارية

- ساعات الاتصال: ٦ ساعات

- محتويات الوحدة:

- ❑ تعريف الدوال
- ❑ القواعد الأساسية لأنواع الدوال .
- ❑ التطبيقات الاقتصادية والإدارية للدوال .

- المرجع: الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية من ص ١٧ الى ص ٥٣

تعريف الدالة : تعبير رياضي يُستخدم لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر

علي سبيل المثال يعبر عن العلاقة بين المتغيرين (x),(y) بالصيغة الدالية الأتية

$$\boldsymbol{y = f(x)}$$

ويمكن التعبير عن العلاقة الدالية السابقة في هيئة معادلة خطية كالاتي :

$\mathbf{a, b \in R}$

حيث أن :

$$\boldsymbol{y} = a + bX$$

X : متغير مستقل   Y : متغير تابع   a , b : ثوابت المعادلة الخطية

تعريف الدالة الحقيقية :

كل قيمة من قيم المتغير المستقل $(\boldsymbol{X})$ تقابلها قيمة واحدة من قيم المتغير التابع $(\boldsymbol{Y})$ في المعادلة الخطية

$$\boldsymbol{y} = a + bX$$

بمعنى أن نطاق الدالة ومجال الدالة تكونان من عناصر هي عباره عن اعداد حقيقية

مثال : من الأمثلة الاقتصادية للدالة دالة الطلب العامة التالية

دالة الطلب العامة

$$\boldsymbol{Q_{d}=f(P,P_c,P_s,T,Y)}$$

Q_d : كمية الطلب الكمية المطلوبة من السلعة

p : سعر الوحدة الواحدة من السلعة

P_c : سعر السلعة المكملة

P_s : سعر السلعة البدلية

T : ذوق المستهلك

Y : دخل المستهلك

Types of Function أنواع الدوال

وفيما يلي شرح مفصلا لكل نوع من الدوال ومعززة ببعض الأمثلة الاقتصادية

أنواع الدوال
Types of Function

Polynomial Functions	الدوال متعددة الحدود
Constant Functions	الدوال الثابتة
Linear Functions	الدوال الخطية
Quadratic Functions	الدالة التربيعية
Exponential Functions	الدوال الأسية

١-٢-١: الدوال متعددة الحدود Polynomial Functions

الشكل العام للدوال متعددة الحدود ذات المتغير الواحد (x) يكتب علي النحو الاتي

$$Y = f(x)$$

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n x^n$$

$$= \sum_{i-0}^{0} a_i \ X^i \qquad X^0 , a_i \in R$$

- تعد الدوال كثيرات (متعددة) الحدود من الدوال الجبرية حيث يكون فيها المتغير X أساسا مرفوع إلي أس (قوة) من درجة $(\mathbf{n})$ في الحد العام للدالة $(\mathbf{a_n X^n})$

- يعد الحد العام للدالة متعددة الحدود أساسا نظريا لتوليد الدوال الأخرى المتمثلة بـ (الدوال الثابتة ، الدوال الخطية - الدوال، لتربيعية) .

- أعلي قوة يأخذها المتغير (X) في الدالة متعددة الحدود يحدد درجة هذه الدالة .

مثال :

الدالة الثابتة

$$\text{If } (n=0) \longrightarrow Y=a_0$$

الدالة الخطية تسمي دالة من الدرجة الاولي

$$\text{If } (n=1) \longrightarrow Y=a_0 + a_1 X$$

الدالة التربيعية تسمي دالة من الدرجة الثانية

$$\text{If}(n=2) \longrightarrow Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

١-٢-٢: الدوال الثابتة – Constant Functions

الشكل العام للدوال الثابتة يكتب علي النحو الاتي :

$$\boldsymbol{Y = f(x)}$$

$$a_0 \in (R/0)$$

$$Y = \boldsymbol{a_0}$$

تعد الدالة الثابتة حالة خاصة من الدوال متعددة الحدود ، عندما تكون (n=0) في الحد العام للدالة متعددة الحدود ($\mathbf{a_n\ x^n}$) .

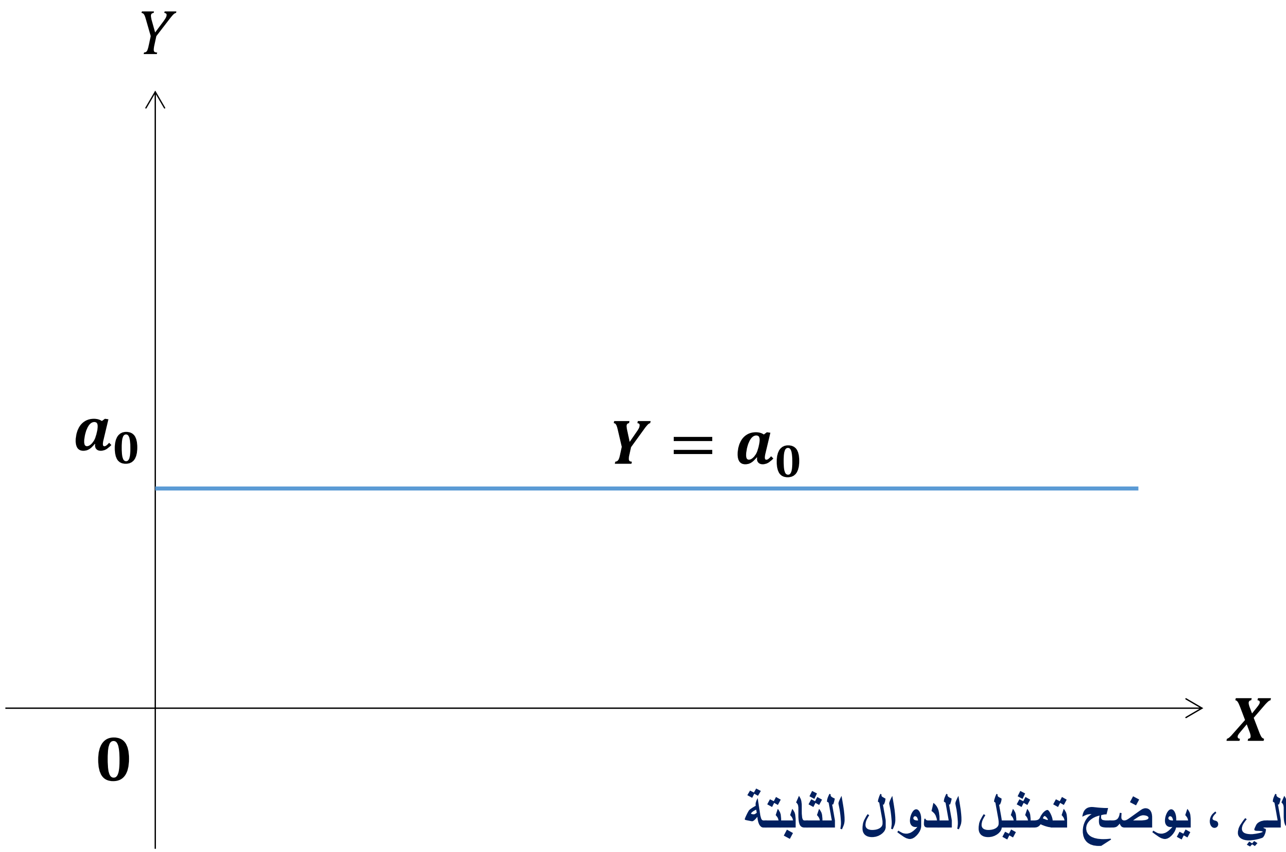
الدالة الثابتة تبقي ثابتة بغض النظر عن قيمة (x).

تظهر الدالة علي شكل خط مستقيم موازى للمحور الأفقي .

مثال (١)

إذا كان سعر بيع الوحدة الواحدة من سلعة معينة هو (20) ريال فإن دالة العائد الحدي (MR) تأخذ الشكل الاتي

حل مثال (١)



$$MR = f(x)$$
$$MR = a_0$$
$$MR = 20 \text{ RS}$$

الشكل البياني التالي ، يوضح تمثيل الدوال الثابتة

١-٢-٣: الدوال الخطية Linear Functions

الشكل العام للدوال الخطية يكتب علي النحو الاتي :

$$Y = f(x)$$

$$Y = a_0 + a_1 X$$

$a_1 \neq 0$ ، $a_0 , a_1 \in R$

حيث أن :

X : متغير مستقل

Y : متغير تابع

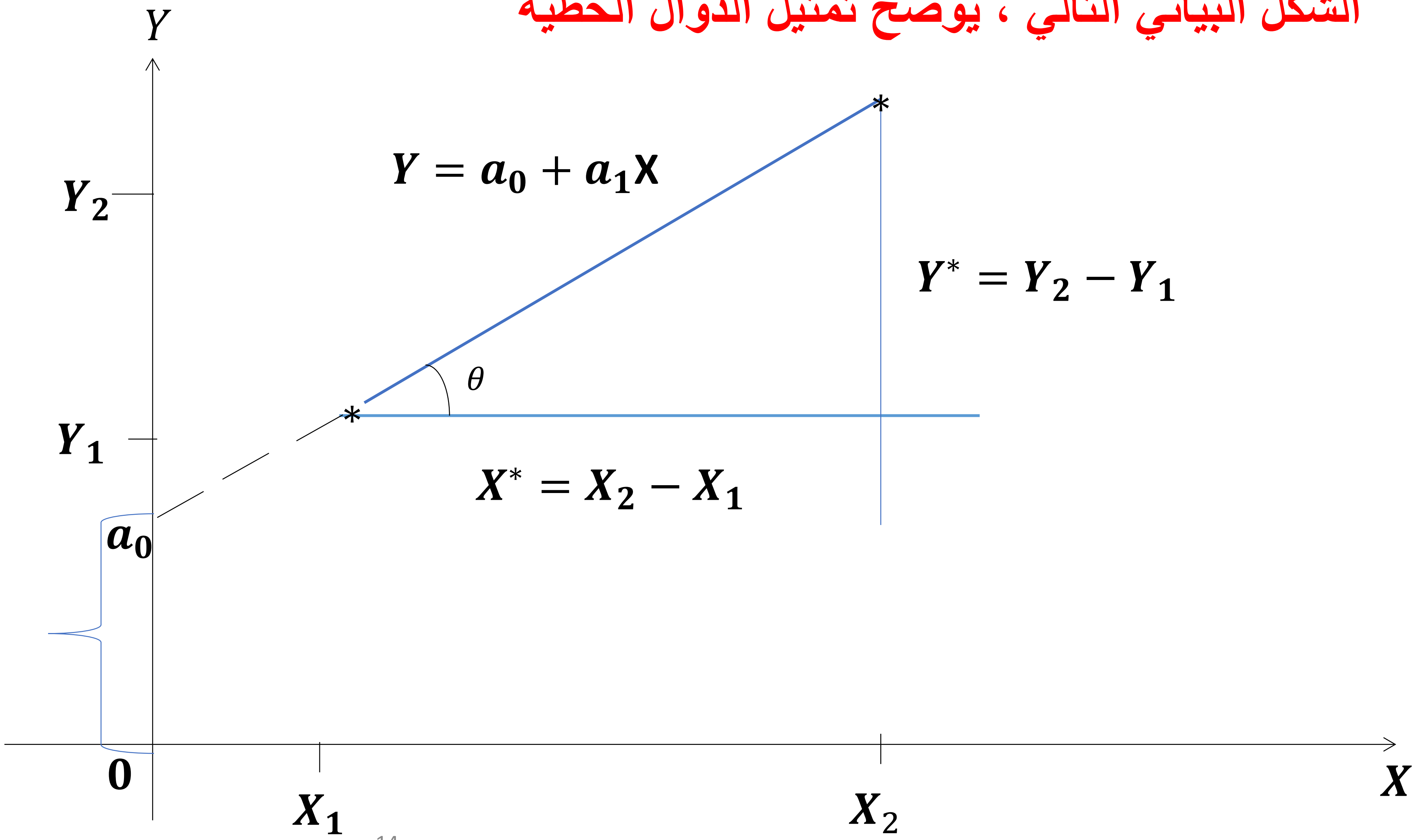
a_0 ، a_1 : معلمات الدالة الخطية (قيم حقيقية)

وتعرف معلمات الدالة الخطية (a_1 ، a_0) كالآتي :

a_0 : بُعد نقطة تقاطع معادلة الخط المستقيم مع الاحداثي الصادي عن نقطة الاصل .

a_1 : تمثل ميل الخط المستقيم

الشكل البياني التالي ، يوضح تمثيل الدوال الخطية



تعد الدالة الخطية حالة خاصة من الدوال متعددة الحدود ، عندما تكون (n=1) في

الحد العام للدالة متعددة الحدود $(a_n X^n)$

الميل(a_1) = $\dfrac{\boldsymbol{Y_2 - Y_1}}{\boldsymbol{X_2 - X_1}}$

وتسمي الدالة الخطية السابقة بأنها معادلة خطية وذلك لآن المتغير (x) المستقل في

المعادلة الخطية يعد من الدرجة الأولى

التطبيقات الاقتصادية الشائعة للدوال الخطية

١) دالة الطلب (Demand Function)

$$Q_{d=a-b\,p}$$

٢) دالة العرض (Supply Function)

$$Q_{s=-a+b\,p}$$

٣) دالة التكاليف الكلية (Total Costs Function)

$$TC=a+b\,Q$$

حيث أن

Q_d : كمية الطلب الكمية علي سلعه معينة

Q_s : الكمية المعروضة من السلعة

p : سعر الوحدة الواحدة من السلعة (بالريال)

TC : التكاليف الكلية (بالريال)

Q : الكميات المنتجة من سلعة معينة (بالوحدات)

a ,b : قيم حقيقية (ثوابت)

فيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية حول الدوال الخطية

مثال (٢)

إذا كانت لديك دالة الطلب علي سلعة معينة تأخذ الشكل الآتي $Q_{d=100} \; -20p$

المطلوب ايجاد ما يأتي :

١- سعر الوحدة من السلعة (P) ، إذا كانت الكمية المطلوبة Q_d منها تساوي (40) وحدة .

٢-*الكمية المطلوبة* Q_d *من السلعة ، عندما تكون السلعة بدون مقابل*

٣- *أعلي سعر* P_{max} *يمكن دفعة المستهلك لهذه السلعة*

حل مثال (٢)

١- حساب السعر (p) ، عندما تكون $(Q_d = 40)$وحدة

$$Q_d = 100 - 20\,p$$
$$40 = 100 - 20P$$
$$20P = 100 - 40$$
$$20P = 60$$

$$P = \frac{60}{20} = 3 \;\; SR$$

٢-إيجاد الكمية المطلوبة $\boldsymbol{Q_d}$ من السلعة ، عندما تكون السلعة بدون مقابل (P = 0)

$$Q_d = 100 - 20\,p$$
$$Q_d = 100 - 20\,(0)$$
$$=100$$

Q_d=100 UNIT

٣- حساب أعلي سعر (P_{max}) يمكن أن يدفعه المستهلك لهذه السلعة :

إن أعلي سعر (Maximum Price) يمكن أن يدفعه المستهلك لهذه السلعة ، يتحقق عندما تكون الكمية المطلوبة من السلعة مساوية للصفر ($Q_d = 0$) ، حيث إن

$$Q_d = 100 - 20\,p$$

$$0 = 100 - 20\,p$$

$$20\,p = 100$$

$$\therefore \quad P_{max} = \frac{100}{20} = 5 \text{ SR}$$

مثال (٣)

إذا كانت لديك دالة العرض لسلعة معينة تأخذ الشكل الآتي : $\boldsymbol{Q_{S=-8+18P}}$

المطلوب ايجاد ما يأتي :

١- السعر (P) الذي يمكن أن تباع به السلعة ،عندما تكون الكية المعروضة منها $(Q_s = 46)$وحدة .

٢-*الكمية المعروضة* (Q_s) *من السلعة ، عندما يكون سعر الوحدة الواحدة من السلعة مساوي* $(P = 5)$ *ريال*

٣- *أقل سعر* (P_{min}) *يمكن أن تباع به السلعة ، لكي يستمر به إنتاج السلعة .*

حل مثال (٣)

١ - حساب السعر (P)، عندما تكون $(Q_s = 46)$وحدة .

$$Q_s = -8 + 18\,p$$
$$46 \;= -8 + 18\,P$$
$$18\,P \;= 54$$

$$\therefore\; P = \frac{54}{18} = 3 \;\text{SR}$$

٢-إيجاد الكمية المطلوبة $\boldsymbol{Q_s}$ ، عندما يكون السعر $(P = 5)$ ريال

$$Q_s = -8 + 18\,\text{P}$$
$$Q_s = -8 + 18\,(5)$$
$$Q_s = -8 + 90$$
$$Q_s = 82$$

$$\therefore\; Q_s = 82 \text{ UNIT}$$

٣- حساب أقل P_{min} يمكن أن تباع به السلعة :

إن أقل سعر (Minimum Price) يمكن أن تباع به السلعة، يتحقق عندما تكون الكمية المعروضة من السلعة

مساوية للصفر ($Q_s = 0$) ، حيث إن :

$$Q_s = -8 + 18\,\mathrm{P}$$

$$0 = -8 + 18\,\mathrm{P}$$

$$18\,\mathrm{P} = 8$$

$$\therefore \quad P_{min} = \frac{8}{18} = 0.444 \ \text{SR}$$

مثال (٤)

إذا كانت لديك دالة التكاليف الكلية لإنتاج سلعة معينة تأخذ الشكل الآتي $TC = 1600 + 40Q$

المطلوب ايجاد ما يأتي :

١- التكاليف الكلية (TC) الازمة لإنتاج $(Q = 10)$وحدة

٢- عددالوحدات المنتجة من السلعة (Q) ، *إذا كانت التكاليف الكلية للإنتاج تبلغ* $(TC = 3200)$ *ريال* .

.

حل مثال (٤)

١ - حساب التكاليف الكلية (TC) الازمة لإنتاج $(Q = 10)$ وحدة .

$$TC = 1600 + 40Q$$
$$TC = 1600 + 40(10)$$
$$TC = 1600 + 400$$
$$TC = 200$$

$$\therefore TC = 2000 \text{ SR}$$

2- إيجاد عدد الوحدات المنتجة من السلعة (Q) ، إذا كانت التكاليف الكلية للإنتاج تبلغ $(TC = 3200)$ ريال

$$TC = 1600 + 40Q$$
$$3200 = 1600 + 40Q$$
$$40Q = 3200 - 1600$$
$$Q = 1600$$

$$\therefore Q = \frac{1600}{40} = 40 \text{ Unit}$$

مثال (٥)

يريد أحد المصانع الإنتاجية بإدخال آلة جديدة لاستخدامها في أنتاج نوع معين من السلع ، ويتوقع المصنع أن تكون التكاليف الكلية الثابتة (TFC) المترتبة عن إدخال الآلة السلعة من الواحدة الوحدة تكون أن المصنع يتوقع حين في ريال (4000) (200)ريال

المطلوب ايجاد ما يأتي :

١- صياغة دالة التكاليف الكلية (TC)

٢- حساب التكاليف الكلية (TC) اللازمة لإنتاج $(Q = 5)$ وحدات من السلعة .

٣- عدد الوحدات المنتجة من السلعة (Q) ، إذا كانت التكاليف الكلية للإنتاج تبلغ $(TC = 6000)$ ريال .

.

حل مثال (٥)

١- صياغة دالة التكاليف الكلية (TC) :

$$Total\ Fixed\ Costs\ (TFC) = 4000\ SR$$

$$Total\ Variable\ Costs\ (TFV) = 200\ Q$$

حيث إن :

$(\boldsymbol{Q})$عدد الوحدات المنتجة من السلعة .

$$TC = \mathrm{TFC} + \mathrm{TVC}$$
$$TC = 4000 + 200\ Q$$

٢- حساب التكاليف الكلية (TC) اللازمة لإنتاج $(Q = 5)$ وحدات من السلعة .

$$TC = 4000 + 200Q$$
$$TC = 4000 + 200\,(5)$$
$$TC = 4000 + 1000$$
$$TC = 5000$$

$$\therefore\ TC = 5000 \quad SR$$

2- إيجاد عدد الوحدات المنتجة من السلعة (Q) ، إذا كانت التكاليف الكلية للإنتاج تبلغ $(TC = 6000)$ ريال

$$TC = 4000 + 200Q$$
$$6000 = 4000 + 200Q$$
$$200Q = 2000$$

$$\therefore\ Q = \frac{2000}{200} = 10 \ \text{Unit}$$

مثال (٦)

إذا كانت لديك دالتي العرض علي سلعة معينة في النموذج الخطي لتوازن السوق الجزئي ، علي النحو الآتي :

$$Q_d = 30 - 2\,p$$ Demand Function

$$Q_s = -40 + 3\,p$$ Supply Function

المطلوب اوجد ما يلي بإستخدام شرط توازن السوق :

١- السعر التوازني (P^*) للسلعة .

٢- الكمية التوازنيه (Q^*)

حل مثال (٦)

١- السعر التوازني (P^*) للسلعة .

يتحقق شرط توازن السوق في نماذج السوق الجزئي عندما يكون

$$Q_d = Q_s$$

$$30 - 2P = -4 + 3P$$

$$30 + 40 = 3P + 2$$

$$5P = 70$$

$$\therefore \boldsymbol{P}^* = \frac{70}{5} = 14 \ \text{SR}$$

٢- الكمية التوازنيه (Q^*)

يمكن الحصول علي الكمية التوازنية من خلال تعويض السعر التوازني للسلعة ، في إحدى الدالتين ولتكن دالة الطلب (P^*)

$$Q_d = 30 - 2P$$

$$Q^* = 30 - 2\,(14)$$

$$Q^* = 30 - 28$$

$$Q^* = 2$$

$$\therefore \boldsymbol{Q}^* = 2 \ \ Unit$$

١-٢-٥: الدوال التربيعية Quadratic Functions

إن الشكل العام للدوال التربيعية يكتب كالآتي :

$$\boldsymbol{Y = f(x)}$$

$$\mathrm{Y} = \boldsymbol{a_0 + a_1 x + a_2 X^2}$$

$a_0, a_1, a_2, \in R a_2 \neq 0$

حيث إن :

X : متغير مستقل

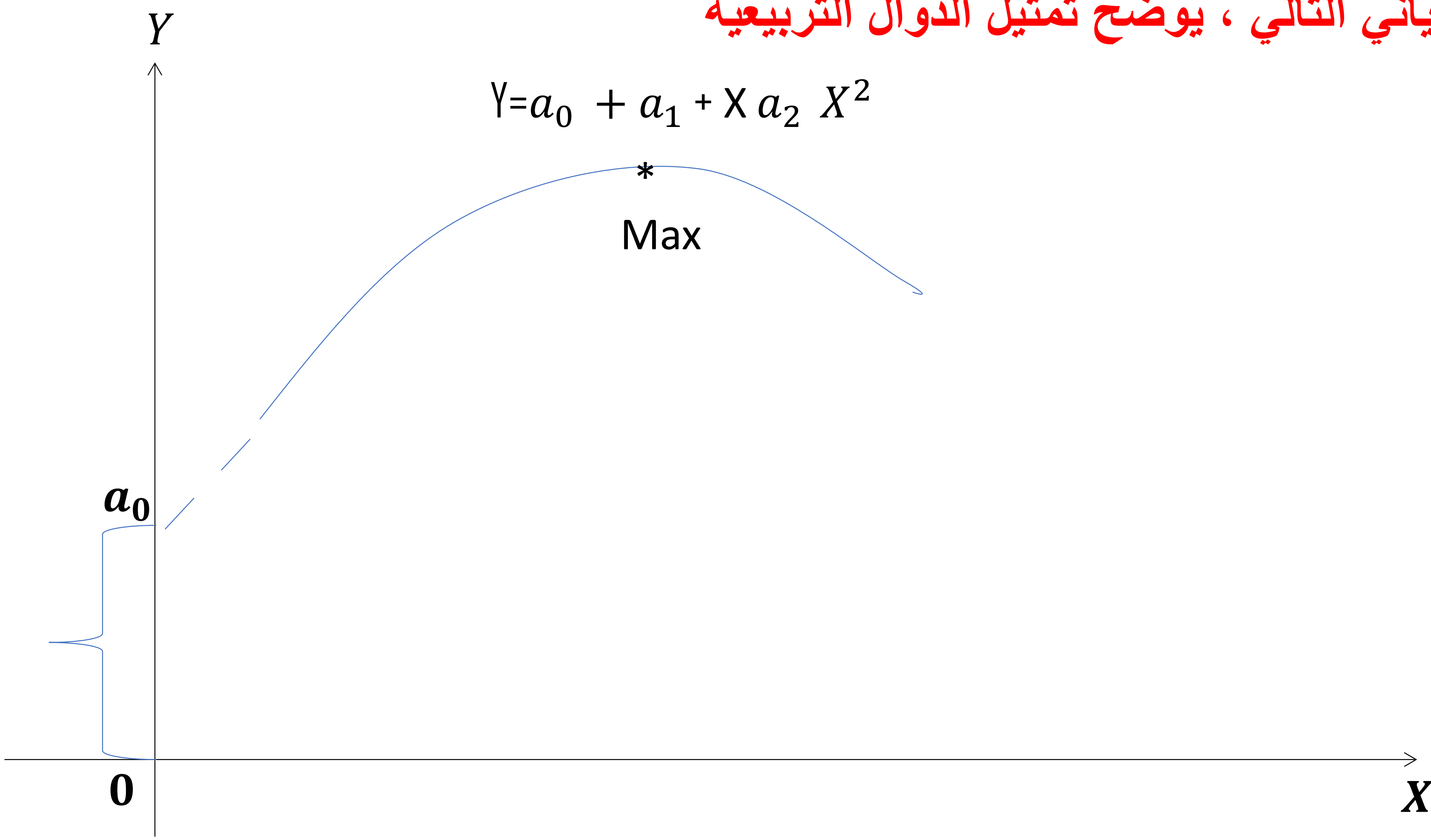
Y : متغير تابع

a_0, a_1, a_2 : معلمات الدالة التربيعية

تُعد الدوال التربيعية حالة خاصة من الدوال متعددة الحدود عندما في الحد العام للدالة متعددة $(n = 2)$ الحدود $(a_n X^n)$

الشكل البياني التالي ، يوضح تمثيل الدوال التربيعية

$Y = a_0 + a_1 + X\, a_2\, X^2$



١-٢-٥: الدوال الأسية Exponential Functions

إن الشكل العام للدالة الأسية يكتب كالآتي :

$$Y = f(x)$$

$$Y = a\ e^{bx}$$

$$a, b \in R, a > 0$$

e : عدد حقيقي غير نسبي وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي و يساوى تقريبا ($e \cong 2.718$)

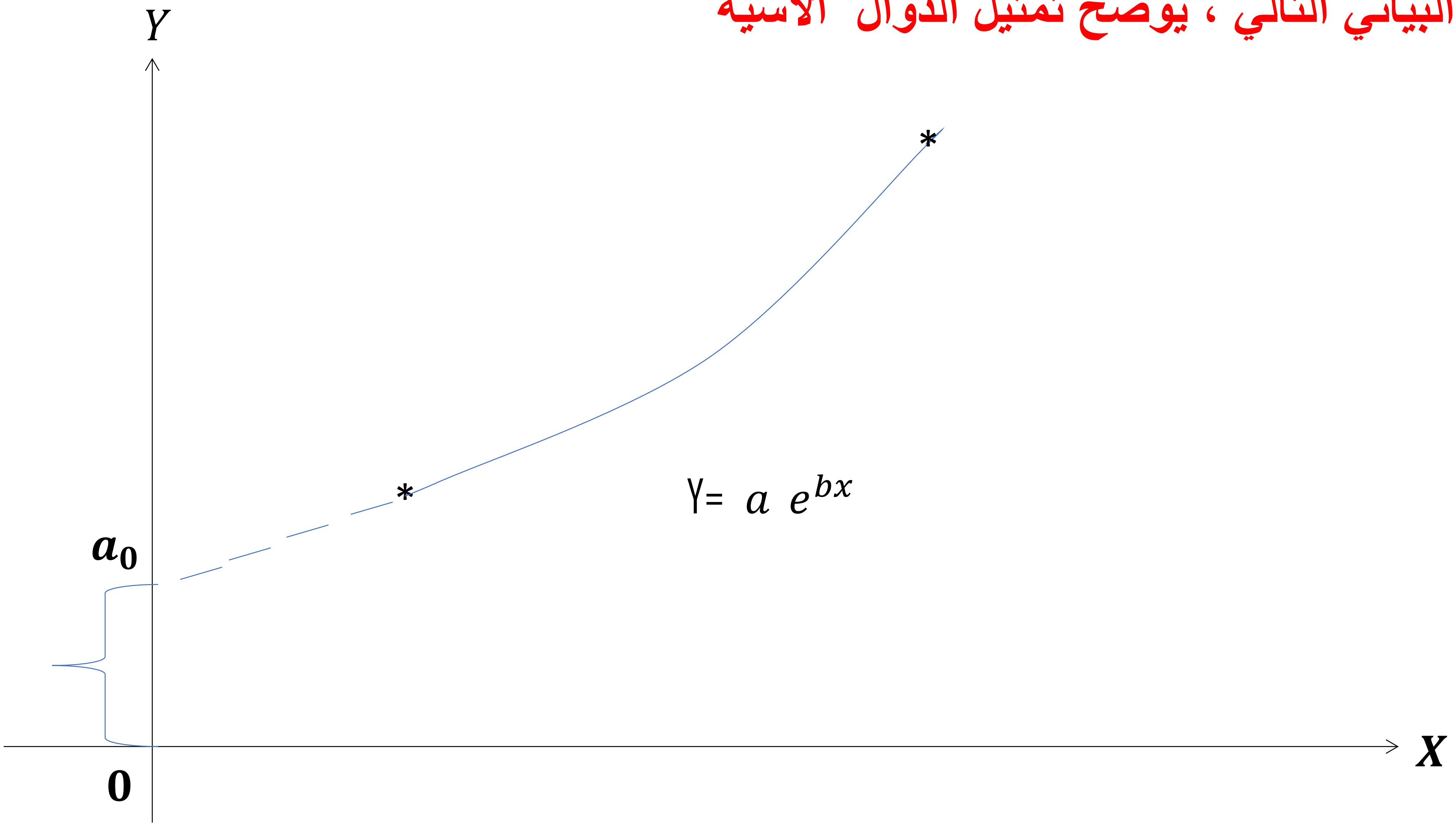
تُعد الدوال الاسية من الدوال غير الجبرية حيث يقع المتغير المستقل (x) فيها يكون أسأ ، وليس في الأساس كما في الدوال الجبرية

تُعد الدالة الثابتة كحالة خاصة من الدالة الآسية من النوع $(Y = a\ e^{bx})$ عندما تكون $(\mathbf{b} = 0)$

ولغرض تحويل الدوال الأسية الي دوال خطية يتم ذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي الدالة السابقة علي النحو التالي :

$$Ln\, Y = Ln\, a + bx$$

الشكل البياني التالي ، يوضح تمثيل الدوال الآسية



قواعد الدوال الأسية

فيما يلي بعض القواعد التي يمكن الاستفادة منها في حل الدوال الآسية

$1-Ln(xy)=Ln\,x+Ln\,y$

$5-Ln\,e^{ax}=ax$

$2-Ln\dfrac{x}{y}=Ln\,x-Ln\,y$

$6-e^{0}=1$

$3-Ln(x^{a})=aLn\;x$

$7-Ln(x\pm y)\neq Ln\,x\pm Ln\,y$

$4-Ln\,e=1$

$8-Ln\sqrt{x}\neq\sqrt{Lnx}$

الوحدة الثانية: المعادلات و تطبيقاتها

- أهداف الوحدة:

بنهاية هذه الوحدة ستكون قادرا على:

- ❑ حل المعادلات التربيعية باستخدام طريقة التحليل للعوامل و طريقة المميز مع التطبيق على المشكلات الاقتصادية والإدارية
- ❑ حل المعادلات الخطية في مجهول واحد و حل أنظمة المعادلات الخطية بالحذف والتعويض مع التطبيق على المشكلات الاقتصادية والإدارية

- ساعات الاتصال: ٦ ساعات

- محتويات الوحدة:

- ❑ تعريف المعادلة التربيعية.
- ❑ حل المعادلات التربيعية (طريقة التحليل للعوامل + طريقة المميز)
- ❑ حل المعادلات الخطية بالحذف و التعويض
- ❑ التطبيقات الاقتصادية والإدارية للمعادلات التربيعية و الخطية.

- المرجع: من ص ٤٣- ص ٥١

من ص ٥٨- ص ٦٥

١ـ تعريف المعادلة التربيعية:

تسمى الدالة التربيعية $Y = f(X)$ بالمعادلة التربيعية (Quadratic Equation)

حيث:

$$Y = f(X)$$

$$\begin{cases} Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \\ a_0, a_1, a_2 \in R \\ a_2 \neq 0 \end{cases}$$

و ذلك لأن المتغير المستقل (X) في المعادلة من الدرجة الثانية (Second Order).

٢- حل المعادلات التربيعية:

و لحل المعادلة التربيعية، ينبغي أولا التعبير عنها باستخدام الصيغة الصفرية للمعادلة التربيعية التالية:

$$a X^2 + b X + c = 0$$

ثم نقوم باستخدام احدى الطرق الحل التالية:

١) طريقة التحليل للعوامل

٢) طريقة المميز (القانون العام)

٢-١- طريقة التحليل للعوامل:

يمكن الحصول على جذري المعادلة التربيعية (Quadratic Equation) بموجب هذه الطريقة، و ذلك من خلال تحليل المعادلة التربيعية الى عواملها الأولية.

المثال (١٠):

جد حل المعادلات التربيعية التالية، باستخدام طريقة التحليل للعوامل:

١) $X^2 - 5X + 6 = 0$

٢) $X^2 - 9 = 0$

3) $9X^2 - 4 = 0$

٤) $X^2 - 6X = -5$

الحل:

يمكن إيجاد حل المعادلات التربيعية السابقة بموجب طريقة التحليل للعوامل، على النحو الآتي:

$$X^2 - 5\,X + 6 = 0$$ (أ

$$(X-2)\,(X-3) = 0$$

$$(X-2) = 0 \Rightarrow X = 2$$

$$(X-3) = 0 \Rightarrow X = 3$$

جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = 3 \text{ ، } X_1 = 2)$

الحل:

٢) $X^2 - 9 = 0$

$$(X-3)\ (X+3) = 0$$

$$(X-3) = 0 \Rightarrow X = 3$$

$$(X+3) = 0 \Rightarrow X = -3$$

جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = -3 \text{ ، } X_1 = 3)$

او يمكن حل المعادلة التربيعية السابقة، على النحو التالي:

$$X^2 - 9 = 0$$

$$X^2 = 9$$

$$X = \pm 3$$

جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = -3 \text{ ، } X_1 = 3)$

الحل:

3) $9X^2 - 4 = 0$

$$(3X-2)(3X+2)=0$$

$$3X-2=0 \Rightarrow 3X=2 \Rightarrow X=\frac{2}{3}$$

$$3X+2=0 \Rightarrow 3X=-2 \Rightarrow X=-\frac{2}{3}$$

جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = - -\frac{3}{2} ، X_1 = \frac{3}{2})$

او يمكن حل المعادلة التربيعية السابقة، على النحو التالي:

$$9X^2 - 4 = 0$$

$$9X^2 = 4$$

$$X^2 = \frac{4}{9}$$

$$X = \pm\frac{2}{3}$$

جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = - -\frac{3}{2} ، X_1 = \frac{3}{2})$

الحل:

4) $X^2 - 6X = -5$

$$X^2 - 6X + 5 = 0$$
$$(X-1)(X-5)=0$$
$$(X-1) = 0 => X = 1$$
$$(X-5) = 0 => X = 5$$

جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = 5$ ، $X_1 = 1)$

المثال (١١):

إذا كانت لديك دالتي العرض و الطلب على سلعة معينة، في نماذج توازن السوق الجزئي، على النحو الآتي:

$$Q_d = 4 - P^2 \implies \text{Demand Function}$$

$$Q_s = -1 + 4P \implies \text{Supply Function}$$

المطلوب:

إحسب السعر التوازني (P^*) و الكمية التوازنية (Q^*) ، باستخدام طريقة التعويض.

الحل:

يتحقق شرط توازن السوق في نماذج السوق الجزئي، عندما يكون:

$$Q_S = Q_s$$

$$4-P^2 = -1+4P$$

$$P^2 + 4P - 5 = 0$$

$$(P+5)(P-1) = 0$$

$P + 5 = 0 \Rightarrow P^* = -5$ يهمل لأنه لا يجوز أن يكون السعر قيمة سالبة

$$P - 1 = 0 \Rightarrow P^* = ١$$

اذن السعر التوازني (P*) يساوي ١ ريال.

و بتعويض السعر التوازني (P*) في احدى الدالتين و لتكن دالة الطلب، نحصل على الكمية التوازنية كالآتي:

$$Q_d = 4 - P^2 \Rightarrow \text{Demand Function}$$

$$Q^* = 4 - (1)^2$$

$$Q^* = 4-1$$

$$Q^* = 3$$

الكمية التوازنية تساوي ٣ وحدات.

٢-٢- طريقة المميز (القانون العام):

لأى معادلة تربيعية في الصورة التالية:

$$a\,X^2 + b\,X + c = 0$$

$$a \neq 0$$

يمكن إيجاد جذريها (X_1 , X_2) باستخدام القانون العام الذي يعطي بالصورة الآتية :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

حيث : Δ تسمى المميز.

ويمكن التمييز بين ثلاثة حالات للمعادلة التربيعية وفقا لقيمة Δ

I. $(\Delta < 0)$ (Δ قيمة سالبة) ففي هذه الحالة لا يوجد حل حقيقي للمعادلة التربيعية.

II. $(\Delta = 0)$ ففي هذه الحالة يوجد حل للمعادلة التربيعية جذرين حقيقيين متساويين.

III. $(\Delta > 0)$ (Δ قيمة موجبة) ففي هذه الحالة يوجد حل للمعادلة التربيعية جذرين حقيقيين غير متساويين.

المثال (١٢):

جد حل المعادلات التربيعية التالية، باستخدام طريقة المميز:

١) $2\,X^2 + 3X - 5 = 0$

٢) $2\,X^2 + 4\,X + 2 = 0$

٣) $3\,X^2 + 4\,X = -3$

مثال (١) أوجد حل المعادلة التربيعية التالية:

$$2\,X^2 + 3X - 5 = 0$$

الحل

من المعادلة السابقة نستخرج قيم الثوابت:

$$a=2\ ,\ b = 3\ ,\ c = -5$$

ولاختبار هل يوجد حل للمعادلة ، نوجد قيمة المميز (Δ) كما يلى :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

$$\Delta = 32 -(4)(2)(-5)$$

$$\Delta = 9 - (-40)$$

$$\Delta = 9 + (40)$$

$$\Delta = 49$$

بما أن ($\Delta>0$)، عليه يوجد للمعادلة التربيعية السابقة جذرين حقيقيين غير متساويين يمكن إيجادهما وفقا للقانون العام كالآتي:

وذلك بالتعويض عن قيم $a=2 , b = 3$ و $\Delta = 49$ في القانون العام كما يلى

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 * 2} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$X_1 = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$X_2 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$$

∴ جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = \frac{-5}{2}$ ، $X_1 = 1)$

مثال (٢) اوجد حل المعادلة التربيعية التالية:

$$2X^2 + 4X + 2 = 0$$

الحل: لاختبار هل يوجد حل للمعادلة ، نوجد قيمة المميز (Δ) كما يلى

$$a=2\ ,\ b = 4\ ,\ c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - (4)(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

بما أن (Δ=٠)، عليه يوجد للمعادلة التربيعية السابقة جذرين حقيقيين متساويين يمكن إيجادهما وفقا للقانون العام كالآتي:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$X = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 * 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$X_1 = X_2 = -1$$

∴ جذرا المعادلة التربيعية هما $(X_2 = -1 \text{ ، } X_1 = -1)$

مثال (٣) أوجد حل المعادلة التربيعية التالية:

$$3X^2 + 4X = -3$$

أولاً نضع المعادلة في الصورة الصفرية

$$3X^2 + 4X + 3 = 0$$

ومنها نجد ان $a=3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 3$

ثانياً لاختبار هل يوجد حل للمعادلة التربيعية، نوجد قيمة المميز (Δ) كالآتي:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 -(4)(3)(3)$$

$$\Delta = 16 - 36$$

$$\Delta = -20$$

بما أن ($\Delta < 0$)(Δ) قيمة سالبة)، عليه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة التربيعية السابقة.

مثال ٤ : إذا كانت دالة الربح لمنتج ما تأخذ الشكل التالى:

$$2P^2 + 37P - 180 = 0$$

<u>المطلوب:</u> احسب السعر (P) الذي ينبغي ان تباع به السلعه بطريقة المميز

<u>الحل</u>

لاختبار هل يوجد حل للمعادلة التربيعية السابقة، ينبغي إيجاد المميز (Δ) كالآتي:

$$a=2,\ b=37,\ c=-180$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 37^2 - 4*2*(-180)$$

$$\Delta = 1369 - (1440)$$

$$\Delta = 1369 + 1440 = 2809$$

بما أن (Δ>٠)، عليه يوجد للمعادلة التربيعية السابقة جذرين حقيقيين غير متساويين يمكن إيجادهما وفقا للقانون الآتي:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-37 \pm \sqrt{2809}}{2*2} = \frac{-37 \pm 53}{4}$$

$$P_1 = \frac{-37+53}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$P_2 = \frac{-37-53}{4} = \frac{-90}{4} = \frac{-45}{2}$$ (يهمل لأنه لا يجوز أن يكون السعر سالب)

عليه سيكون السعر (P=4) ريال هو السعر الذى يحقق الربح المستهدف

٣- نظام المعادلات الخطية:

إن الشكل العام لنظام المعادلات الخطية يكون كالآتي:

$$a_{11}X_1, +a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots +a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1, +a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots +a_{2n}X_n = b_2$$

$$a_{m1}X_1, +a_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots +a_{mn}X_n = b_m$$

حيث إن:

m: تمثل عدد المعادلات في النظام

n: تمثل عدد المتغيرات في النظام

و سيتم التركيز على حل نظام المعادلات الخطية في حالة متغيرين أو مجهولين (X وY)، و حل نظام المعادلات الخطية في حالة ثلاثة متغيرات أو مجاهيل (X وY و Z)، باستخدام :

١. طريقة التعويض
٢. طريقة الحذف

٣-١- حل المعادلات الخطية في حال متغيرين (مجهولين):

إن الشكل العام لنظام المعادلات الخطية في حال متغيرين (مجهولين) يكون كالآتي:

$$a_{11}X, +a_{12}Y = b_1$$
$$a_{21}X, +a_{22}Y = b_2$$

المثال (١٤):

جد حل المعادلات الخطية التالية،

$$8X + 4Y = 16 \quad (1)$$
$$4X + 6Y = 12 \quad (2)$$

باستخدام:

١) طريقة التعويض

٢) طريقة الحذف

الحل:

أ-طريقة التعويض:

من المعادلة (١) نحصل على:

$$8X + 4Y = 16$$

$$8X = 16 - 4Y$$

بقسمة طرفي المعادلة على (٨) نحصل على :

$$X = \frac{16}{8} - \frac{4Y}{8}$$

$$X = 2\text{-}0.5\,Y \quad (3)$$

نعوض ناتج المعادلة (٣) في المعادلة (٢) نحصل على:

$$4X + 6Y = 12 \quad (2)$$

$$4(2\text{-}0.5) + 6Y = 12$$

$$8 - 2\,Y + 6\,Y = 12$$

$$8 + 4\,Y = 12$$

$$4\,Y = 12 - 8 = 4$$

$$Y = \frac{4}{4} = 1$$

نعوض قيمة (Y = 1) في المعادلة (٣) نحصل على قيمة المتغير (X) كالآتي:

$$X = 2 - 0.5\,(1)$$

$$X = 2 - 0.5$$

$$X = 1.5$$

ب – طريقة الحذف:

$$8X + 4Y = 16 \quad (1)$$

$$-2^{*} \qquad 4X + 6Y = 12 \quad (2)$$

$$8X + 4Y = 16 \quad (1)$$

$$-8X - 12Y = -24 \quad (2)$$

بالجمع $\quad -8Y = -8$

$$Y = \frac{-8}{-8}$$

$$Y = 1 \qquad (3)$$

تعويض قيمة (Y = 1) في احدى المعادلتين و لتكن المعادلة (١) لنحصل عللى القيمة X كالآتي:

$$8X + 4Y = 16$$

$$8X + 4(1) = 16$$

$$8X + 4 = 16$$

$$8X = 16-4$$

$$8X = 12$$

$$X = \frac{12}{8}$$

$$X = 1.5$$

الوحدة الثالثة: المصفوفات و تطبيقاتها

- أهداف الوحدة:

بنهاية هذه الوحدة ستكون قادرا على:

- ❑ فهم تعريف المصفوفة.
- ❑ تحديد رتبة المصفوفة وعدد العناصر بمعلوميّة دليل المصفوفة.
- ❑ إيجاد قيم المجاهيل داخل المصفوفتان بمعلوميّة تساوي المصفوفتان.

- محتويات الوحدة:

- ❑ تعريف المصفوفة.
- ❑ مرتبة وسعة المصفوفة.
- ❑ تساوي المصفوفتان.
- ❑ التطبيقات الاقتصادية والإدارية للمصفوفات.

- ساعات الاتصال: ٣ ساعات
- المرجع: من ص ٧١- ص ٨١

تعريف المصفوفة

تعرف المصفوفة (Matrix) بأنها تشكيل رياضي مكون من مجموعة من العناصر على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين، وتسمى العناصر التي تقع على الخطوط الافقية بالصفوف (Rows) أو المتجهات الصفية (Rows Vectors) ، بينما تسمى العناصر التي تقع على الخطوط العمودية بالأعمدة(Columns) أو المتجهات العمودية (Columns Vectors).

يتم الإشارة إلى عدد الصفوف (Rows) والأعمدة (Columns) التي تضمنتها المصفوفة (mxn) ويسمى هذا الرمز بمرتبة المصفوفة أو درجة المصفوفة.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أو تكتب بشكل أكثر إختصاراً هو:

$$A_{mxn} = (a_{ij})$$

حيث إن:

a_{ij} : العنصرالذي يقع في الصف (i) والعمود (j).

وتسمى الأعداد الموجودة في المصفوفة السابقة A بالعناصر، ويمكن تمثيلها بحروف صغيرة للتعبير عنها، وتسمى هذه العناصر في جبر المصفوفات بالأعداد القياسية (Scalars).

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{4 أعمدة}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}}\right\} \text{ثلاثة صفوف}$$

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8− موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

١-مرتبة المصفوفة Order Or Matrix :

وهي عبارة عن درجة أو مرتبة المصفوفة، وتعرف سعة المصفوفة بأنها عبارة عن عدد صفوف المصفوفة في عدد أعمدتها. إذا كان لدينا المصفوفات الآتية:

مثال (١)

إذا كان لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}4 & 7\\3 & 6\\2 & 4\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 0 & 1\\4 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- مرتبة المصفوفات السابقة.

2- عدد عناصر كل مصفوفة (سعة المصفوفة).

الحل:

1 – مرتبة المصفوفات:

أ– مرتبة المصوفة A هي (2x2).

ب– مرتبة المصفوفة B هي (3x2).

جـ - مرتبة المصفوفة C هي (3x3).

2 – عدد عناصر كل مصفوفة:

أ– عدد عناصر المصفوفة A هي (4) عناصر.

ب– عدد عناصر المصفوفة B هي (6) عناصر.

جـ - عدد عناصر المصفوفة C هي (9) عناصر.

٢-تساوي مصفوفتين Equal Two Matrices :

إذا كان لدينا المصفوفتان A= (a_{ij}) و B = (b_{ij}) .

فإنه يقال على المصفوفتين متساويتين (A=B)إذا وفقط إذا كانتـا مـن نفس المرتبة (الدرجة) وإن كل عنصر من عناصر المصفوفة A يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة B أي إن .

$$a_{ij} = b_{ij}$$

فعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا المصفوفتان الآتيتان:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{2x2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ولكي تكون المصفوفتان متساويتان (A=B)، ينبغي أن تكون العناصر المتناظرة متساوية، أي إن:

$$a_{11} = b_{11} \quad , a_{12} = b_{12}$$
$$a_{21} = b_{21} \quad , a_{22} = b_{22}$$

مثال (٢)

إذا كان لدينا المصفوفات الآتية:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

2) $C=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}\sqrt{9} & 25\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

3) $E=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}5 & 7 & 1\\ 3 & 2 & 6\end{bmatrix}$

المطلوب:

هل تُعد المصفوفات (A,B) و (C,D) و (E,F) متساوية؟ معللاً ذلك؟

الحل:

(1) $A \neq B \Leftarrow$ لأن ($a_{11} \neq b_{11}$).

(2) $C = D \Leftarrow$ لأن العناصر المتناظرة متساوية للمصفوفتين، ولكونهما من نفس المرتبة (الدرجة).

(3) $E \neq F \Leftarrow$ لاختلاف مرتبة (درجة) المصفوفتين، حيث إن مرتبة المصفوفة E هي (2x2)، ومرتبة المصفوفة F هي (2×3).

مثال (٣)

إذا كان لدينا المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 3 & 0 & Y\end{bmatrix} \qquad , B=\begin{bmatrix}1 & X & 3\\ 4 & 5 & Z\\ 3 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

المطلوب:

1 – على إعتبار إن المصفوفتين B, A متساويتان، جد قيمة المجاهيل (Z, Y, X).

2 – إثبت إن [$Y = X^2$].

الحل:

$$1)\ \because A = B$$
$$\therefore\ X = 3 \qquad ,Z = 2 \qquad , Y = 9$$
$$2)\ \because Y = 9$$
$$\therefore\ X^2 = 3^2 = 9$$
$$\therefore\ Y = X^2 = 9$$

٣-منقول (مبدلة المصفوفة): Transpose of Matrix

وهي عبارة عن تبديل صفوف المصفوفة محل أعمدتها ، حيث سيصبح عدد صفوف المصفوفة الأصلية مساوي لعدد الأعمدة

في مبدلة المصفوفة، ويرمز لمبدول المصفوفة A بالرمز A^T او A'

فعلى سبيل المثال: لو كانت لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ من مرتبة (nxm) ، فإن منقولها أو مبدلتها تكون كالاتي:

$$A^T = (a_{ji})_{(mxn)}$$

مثال (٥)

إذا كان لدينا المصفوفتان الآتيتان:

$$A_{3x3}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \quad , \quad B_{2x3}=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

1 – منقول المصفوفة A^T والمصفوفة B^T.

2 – إثبت أن:

$$(B^T{}_{3x2})^T=B_{2x3}$$

الحل:

1) $$A^T{}_{3x3}=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$$

$$B^T{}_{3x2}=\begin{bmatrix}1&6\\2&4\\3&2\end{bmatrix}$$

2) $$\therefore (B^T{}_{3x2})^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}$$

$$\therefore (B^T{}_{3x2})^T=B_{2x3}$$

أنواع المصفوفات Types of Matrices :

تكون المصفوفات على أنواع عدة، نذكر منها ما يأتي:

١-المصفوفة المربعة Square Matrix:

وهي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، أي إن (m=n) مثال ذلك:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , B_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

٢-المصفوفة الصفرية:Zero Matrix

وهي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها مساوية للصفر، مثال ذلك:

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad,\quad O_{2\times3}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad,B_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

٣-المصفوفة الحيادية (مصفوفة الوحدة)Identity (Unit) Matrix

وهي مصفوفة مربعة من مرتبة (n)، جميع عناصرها أصفاراً باستثناء عناصر القطر الرئيسي

تساوي واحد(1)، ويرمز لها بالرمز(I_n)،مثال ذلك:

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad,\ I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

٤ـ المصفوفة القطرية :Diagonal Matrix

وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها التي تقع خارج القطر الرئيسي أصفاراً ، ويرمز لها بالرمز (D) ، وتعد مصفوفة الوحدة حالة خاصة منها، مثال ذلك :

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow D=\text{diag}\,(1 \quad 2)$$

$$B_{3x3}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow D=\text{diag}\,(2 \quad 5 \quad 3)$$

٥ـ المصفوفة المثلثية السفلى :Lower Triangular Matrix

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة أعلى القطر الرئيسي اصفارا

$$A_{3x3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 6\end{bmatrix}$$

٦- المصفوفة المثلثية العليا: Upper Triangular Matrix

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة أسفل القطر الرئيسي اصفاراً، مثال ذلك:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٧- المصفوفة العددية: Numerical Matrix

هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية ،أما عناصرها الأخرى خارج القطر تكون أصفاراً ، وتعد المصفوفة العددية حالة خاصة من المصفوفة القطرية، مثال ذلك:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{3x3} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

٨-المصفوفة المتماثلة :Symmetric Matrix

وهي مصفوفة مربعة التي تكون فيها عناصر الثلث العلوي مساوية لعناصر الثلث السفلي ،مثال ذلك:

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 8\end{bmatrix} \qquad , B_{3x3}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\-1 & 0 & 3\\4 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

وتُعد المصفوفة A مصفوفة متماثلة، إذا كانت:

$$A=A^T$$

الوحدة الرابعة: المحددات و تطبيقاتها

- أهداف الوحدة:

بنهاية هذه الوحدة ستكون قادرا على:

- ❑ إيجاد محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة.
- ❑ استخدام قاعدة كرايمر في حل المعادلات الخطية.

- محتويات الوحدة:

- ❑ تعريف المحددات.
- ❑ طرق إيجاد محدد المصفوفة.
- ❑ طرق حل المعادلات الخطية .
- ❑ التطبيقات الاقتصادية والإدارية للمحددات.

- ساعات الاتصال: ٦ ساعات
- المرجع: من ص ٨٨- ص ١٣٨

المحددات: Determinants

يعرف المحدد على انه عباره عن عدد حقيقي لكل مصفوفة مربعة ويرمز له بالرمز $|A|$ وتكتب بالصورة الآتية:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

من أعلاه يتضح بأن عناصر المحددة | A | يتم حصرها بمستقيمات عموديـة | | للدلالة عن محددة المصفوفة A

طرق إيجاد محدد المصفوفة

أولا: إيجاد محددة المصفوفة من الدرجة (2x2) :

بافتراض لدينا المصفوفة A من الدرجة (2x2) ، عليه تكون محددة المصفوفة كالآتي:

$$\because A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

مثال(١٣):

إذا كان لديك المصفوفات الآتية:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad 2)\ B=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد محددة المصفوفة $|A|$ ومحددة المصفوفة $|B|$.

الحل:

$$1)\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=3(4)-1(2)$$

$$=12-2$$

$$=10$$

$$2)\ |B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=4(3)-5(6)$$

$$=12-30$$

$$=-18$$

نظرية:

عندما يكون ($|A|=0$)، ففي هذه الحالة تسمى المصفوفة A بالمصفوفة المنفرد

.(Singular Matrix)

مثال ذلك:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2(2)-4(1)=4-4=\text{Zero}$$

ثانيا: إيجاد محدد المصفوفة من الدرجة الثالثة (3X3):

لإيجاد محدد المصفوفة من الدرجة (3X3)، نقوم باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

أولا: طريقة الأسهم:

بافتراض لدينا المصفوفة A من الدرجة (3x3)، عليـه يمكن إيجاد محـدد المصفوفة A بموجب هذه الطريقة وفقاً للخطوات التالية :

١/تقوم بوضع العمودين الأول والثاني إلى يمين محددة المصفوفة.

٢/ تقوم بتكوين ثلاثة أقطار رئيسية، بعد ذلك ضرب عناصر كل قطر مع بعضها، وإيجاد حواصل ضرب العناصر للأقطار الثلاثة.

٣/ تكوين ثلاثة أقطار ثانوية، بعد ذلك يتم ضرب عناصر كل قطر مع بعضها، وإيجاد حواصل ضرب العناصر للأقطار الثلاثة.

٤ - إيجاد حاصل طرح ناتج الخطوة (٣) من ناتج الخطوة (٢) .

ولتوضيح الخطوات السابقة، دعنا نسوق المثال الآتي:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

مثال (١٤):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

المطلوب:إحسب محددة المصفوفة |A|، باستخدام طريقة الأسهم.

الحل:

يمكن حساب محددة المصفوفة |A|، باستخدام طريقة الاسهم كالآتي:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}3 & -1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 4 & 7 & 5 & 4 & 7\end{array}\right.$$

$$= [3(2)(5)+ (-1)(3)(4)+ 1(0)(7)] - [1(2)(4)+3(3)(7)+ (-1)\ (0)(5)]$$

$$= 30[-12+0] - (8+63+0)$$

$$= 18-71$$

$$= -53$$

ثانيا: الطريقة العامة (طريقة المحيددات) :

تعد طريقة المحيددات (Minors) من الطرق العامة لإيجاد قيمة المحددة مهما كانت درجة (مرتبة) المصفوفة المربعة كأن تكون من الدرجة الثانية (2x2) أو الثالثة (3x3) أو الرابعة (4X4) أو أي درجة أخرى .

ولتوضيح آلية إيجاد محددة المصفوفة المربعة بموجب هذه الطريقة، دعنا نفترض المصفوفة المربعة A من درجة (3x3) التي تأخذ الشكل الآتي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولايجاد محددة المصفوفة $|A|$ بموجب طريقة المحيددات، نتبع الخطوات الآتية:

1- توزيع الاشارات لكل عنصر من عناصر المصفوفة A بشكل تبادلي، على النحو الآتي:

$$A=\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

2- إختيار أحد صفوف المصفوفة أو أحد أعمدتها، لغرض الحصول على محددة المصفوفة $|A|$.

وفي ضوء الخطوات السابقة، يمكن الحصول على محددة المصفوفة $|A|$، بعد إختيار الصف الأول مثلاً:

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

خواص المحددات:

فيما يلي أهم خواص المحددات، والتي يمكن الاستفادة منها في بعض تطبيقات المصفوفات

١ - محددة مصفوفة الوحدة (المصفوفة الحيادية) تساوي الواحد الصحيح

$$|I_n| = 1$$

مثال (١٧):

جد محددة مصفوفة الوحدة (I_2) الآتية:

$$|I_2| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\begin{aligned} |I_2| &= 1(1) - 0(0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

٢- محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

مثال (١٨):

جد محددة المصفوفة القطرية (A_{3x3}) الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} |A| &= 2\,(3)\,(4) \\ &= 24 \end{aligned}$$

٣- محدد المصفوفة المثلثية (السفلى أو العليا) تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

مثال(١٩):

جد محددة المصفوفات المثلثية الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

الحل:

$$1)\ |A|=4(2)(1)$$
$$=8$$
$$2)\ |B|=3(4)(-3)$$
$$=-36$$

٤- محدد المصفوفة A يساوي محدد مبدلتها $((A^T)$أي أن:

$$|A| = |A^T|$$

مثال (٢٠):

إذا كانت لديك المصفوفة الاتية:

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

المطلوب: إثبت إن ($|A|=|A^T|$).

الحل:

$$|A| = 3(-2) - 4(1)$$
$$= -6 - 4$$
$$= -10$$
$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$
$$|A^T| = 3(-2) - 1(4)$$
$$= -6 - 4$$
$$= -10$$
$$\therefore |A| = |A^T|$$

٥-إذا تساوت عناصر صفان أو عمودان في المصفوفة A، فإن محدد المصفوفة يساوي(صفر)،أي أن:

$$|A| = 0$$

مثال (٢٢):

جد محددة المصفوفات الاتية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

الحل:

$$1)\ |A| = 3(4)-4(3)$$
$$=12-12$$
$$=0$$

$$2)\ |B| = 1\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}4 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix} + 3\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$
$$=1[5(3)-6(2)]-2[4(3)-6(1)]+3[4(2)-5(1)]$$
$$=1(15-12)-2(12-6)+3(8-5)$$
$$=3-12+9$$
$$=12-12$$
$$=0$$

٦-إذا كان أحد الصفوف (او الاعمدة) في المصفوفة A، من مضاعفات صف آخر (أو عمود آخر)، فإن محدد المصفوفة يساوي (صفر)، أي أن:

$$|A| = 0$$

مثال (٢٣):

جد محدد المصفوفة الاتية:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A=6(-2)-(-1)(12)$$
$$=-12+12$$
$$=0$$

٧ـعند استبدال صف محل صف آخر أو عمود محل عمود آخر في مصفوفة معينة فإن إشارة محددها ستتغير.

مثال (٢٤):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

إثبت إن $(|B|=-|A|)$

الحل:

$$|A|=3(4)-2(1)$$
$$=12-2$$
$$=10$$

نقوم بإبدال العمود الثاني محل العمود الأول، كما موضح في المصفوفة B الآتية:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B|=2(1)-3(4)$$
$$=2-12$$
$$=-10$$
$$=-|A|$$
$$\therefore |B|=-|A|$$

٨-إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف (او الاعمدة) في المصفوفة A تساوي(صفرا)، فإن محدد المصفوفة يساوي(صفر)، أي إن:

$$|A| = 0$$

مثال (٢٥):

جد محددة المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A|=2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=2[3(0)-0(5)]-1[(-1)(0)-0(4)]+0[(-1)(5)-3(4)]$$

$$=2(0-0)-1(0-0)+0(-5-12)$$

$$=2(0)-1(0)+0(-17)$$

$$=0$$

حل نظام المعادلات الخطية:

الشكل العام لنظام المعادلات الخطية يكون كالآتي:

$$a_{11}X_1, +a_{12}X_2 + \ \dots\dots..+a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1, +a_{22}X_2 + \ \dots\dots..+a_{2n}X_n = b_2$$

$$a_{m1}X_1, +a_{m2}X_2 + \ \dots\dots..+a_{mn}X_n = b_m$$

حيث إن:

m: تمثل عدد المعادلات في النظام

n: تمثل عدد المتغيرات في النظام

و يمكن حل نظام المعادلات الخطية باستخدام أيًّ من الطرق التالية:

١. طريقة الحذف
٢. طريقة التعويض
٣. طريقة معكوس المصفوفة
٤. طريقة كريمر

حل نظام المعادلات الخطية بطريقة كرايمر (طريقة المحددات)

بافتراض أن لدينا نظام المعادلات الخطية التالى :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات (أي ايجاد قيمة المجاهيل x, y) باستخدام طريقة كرايمر بإتباع الخطوات التالية:

(١) نوجد محدد مصفوفة المعاملات ونرمز له بالرمز A :

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(٢) نوجد محدد A_x وذلك باستبدال معاملات x وهى $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ بقيم النواتج $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ كما يلى:

$$A_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(٣) نوجد محدد A_y وذلك باستبدال معاملات y وهى $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ بقيم النواتج $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ كما يلى:

$$A_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(٤) نحصل على قيمتي x, y باستخدام المعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{A_x}{A} \quad , \qquad y = \frac{A_y}{A}$$

مثال ١ : أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية التالية

$$\mathbf{2x + 2y = 10}$$

$$\mathbf{3x + 4y = 18}$$

<u>الحل</u>

لإيجاد قيم المجاهيل x, y نتبع الخطوات التالية:

(١) نوجد محدد مصفوفة المعاملات A:

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2 \times 4) - (3 \times 2) = 8 - 6 = 2$$

(٢) نوجد A_x وذلك باستبدال معاملات x وهى $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بقيم النواتج $\begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix}$ كما يلى:

$$\mathrm{A}_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = (10 \times 4) - (18 \times 2) = 40 - 36 = 4$$

(٣) نوجد A_y وذلك باستبدال معاملات y وهى $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ بقيم النواتج $\begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix}$ كما يلى:

$$\mathrm{A}_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = (2 \times 18) - (3 \times 10) = 36 - 30 = 6$$

(٤) نحصل على قيمتي x, y باستخدام المعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{\mathrm{A}_x}{\mathrm{A}} = \frac{4}{2} = 2\,,$$

$$y = \frac{\mathrm{A}_y}{\mathrm{A}} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال 2 : أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية التالية

$$\boldsymbol{-20x + y = 800}$$
$$\boldsymbol{-10x + y = 1000}$$

<u>الحل</u>

لإيجاد قيم المجاهيل x, y نتبع الخطوات التالية:

(١) نوجد محدد مصفوفة المعاملات :

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} -20 & 1 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = (-20 \times 1) - (-10 \times 1) = -20 - 10 = -10$$

(٢) نوجد A_x كما يلى:

$$\mathrm{A}_x = \begin{vmatrix} 800 & 1 \\ 1000 & 1 \end{vmatrix} = (800 \times 1) - (1000 \times 1) = 800 - 1000 = -200$$

(٣) نوجد A_y وذلك كما يلى:

$$\mathrm{A}_y = \begin{vmatrix} -20 & 800 \\ -10 & 1000 \end{vmatrix} = (-20 \times 1000) - (-10 \times 800) = -20000 + 8000 = -12000$$

(٤) نحصل على قيمتي x, y باستخدام المعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{\mathrm{A}_x}{\mathrm{A}} = \frac{-200}{-10} = 20\,,$$
$$y = \frac{\mathrm{A}_y}{\mathrm{A}} = \frac{-12000}{-10} = 1200$$

التطبيقات الاقتصادية للمحددات

مثال (١)

إذا كان لديك دالتي العرض والطلب على سلعة معينة في إقتصاد ما، تأخذ الشكل الآتي:

$$Q_d = Q_s$$
$$Q_d = 2 - 3p$$
$$Q_s = -3 + 6P$$

طريقة كرايمر:

المطلوب اوجد الكمية التوازنية *Q والسعر التوازني *P بطريقة كرايمر

الحل :

أولا نضع المعادلات على الصورة التالية:

$$\boldsymbol{Qd + 3P = 2}$$
$$\boldsymbol{Qs - 6P = -3}$$

يمكن إيجاد الكمية التوازنية (Q^*) والسعر التوازني (P^*)، وفقاً للصيغة الآتية:

$$X_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

قبل البدء بتطبيق الصيغة السابقة، ينبغي أولاً بناء المصفوفات الخاصة بمتغيرات النظام وعلى النحو الآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A_Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A_P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = -6-3=-9$$

$$|A_Q| = -12+9=-3$$

$$|A_P| = -3-2=-5$$

$$\therefore Q^* = \frac{|A_Q|}{|A|} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

$$P^* = \frac{|A_P|}{|A|} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9}$$

الوحدة الخامسة: التفاضل وتطبيقاته

The Derivative and it's Applications

- أهداف الوحدة:

بنهاية هذه الوحدة ستكون قادرا على:

- ❑ اشتقاق الدوال الرياضية المختلفة.
- ❑ إيجاد المشتقات التفاضلية العليا.
- ❑ توظيف التفاضل في حل بعض المشكلات المالية والإدارة والاقتصادية.

- ساعات الاتصال: ٦ ساعات

- محتويات الوحدة:

- ❑ تعريف الاشتقاق.
- ❑ القواعد الأساسية لاشتقاق الدوال.
- ❑ التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل.

- المرجع: من ص ٢٠٥- ص ٢٣٤

مقدمة: المشتقة التفاضلية من المفاهيم الرياضية الهامة والتي تستخدم بشكل واسع في التطبيقات الإدارية والمالية والاقتصادية وغيرها من المجالات.

ولتوضيح مفهوم المشتقة التفاضلية للدالة، نفترض ان لدينا متغيرين أحدهما مستقل X والأخر تابع Y وتمثل العلاقة بينهما الدالة التالية

$$y = f(x)$$

وبالتالي فإنه فى حالة حدوث تغير طفيف جدا في المتغير المستقل X مقداره (Δx) يقترب من الصفر $(\Delta x \to 0)$، فان ذلك سيتبعه تغير في المتغير التابع Y مقداره (Δy) ويسمى ذلك بالمشتقة التفاضلية للدالة ويرمز له عادة بأحد الرموز التالية

$$\frac{dy}{dx}, \qquad f'(x), \qquad y'$$

وهو ما يمكن التعبير عنه رياضيا في صيغة النهاية التالية

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

The Derivative Rules قواعد الاشتقاق

بفرض ان لدينا الدالة القابلة للاشتقاق فإننا يمكننا اجراء الاشتقاق للدالة بالاستعانة $\mathbf{Y = f(x)}$ بالقواعد التالية:

1- مشتقة الدالة الثابتة=0

إذا كانت لدينا الدالة الثابتة التالية:

$$f(x) = k$$

حيث k مقدار ثابت

فإن مشتقتها

$$f'(x) = 0$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $f(x) = 150$

2) $f(x) = \sqrt{10}$

الحل:

1) $f'(x) = 0$

2) $f'(x) = 0$

2- مشتقة الدالة $y = x$

اذا كانت لدينا الدالة

$$y = x$$

فإن مشتقتها

$$\acute{y} = 1$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = x$

الحل:

1) $\acute{y} = 1$

3- مشتقة دالة القوى $y = x^n$

اذا كانت لدينا الدالة

$$y = x^n$$

فإن مشتقتها

$$\acute{y} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = x^4$

2) $y = \sqrt{x}$

الحل:

1) $\acute{y} = 4x^3$

2) $\because y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \acute{y} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

4- مشتقة دالة مضروب في ثابت =المقدار الثابت في تفاضل الدالة

اذا كانت لدينا الدالة $y = k \cdot f(x)$ حيث k ثابت،

فإن مشتقتها

$$\acute{y} = k \cdot f'(x)$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = 5x^4$

2) $y = 8x^3$

الحل:

1) $\acute{y} = 5(4x^3) = 20x^4$

2) $\acute{y} = 8(3x^2) = 24x^2$

5- مشتقة حاصل جمع أو طرح دالتين:

اذا كانت لدينا الدالة

$$\mathbf{y} = g(x) \pm h(x)$$

فإن مشتقتها

$$y' = g'(x) \pm h'(x)$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = x^4 - 3x^5$

2) $y = 2x^4 + x^5 - 2x - 6$

الحل:

1) $\mathrm{y}' = 4x^3 - 15x^4$

2) $\mathrm{y}' = 8x^3 + 5x^4 - 2$

6- مشتقة حاصل قسمة دالتين:

اذا كانت لدينا دالة حاصل قسمة دالتين

$$y = \frac{h(x)}{g(x)}$$

حيث $g(x) \neq 0$

فإن مشتقتها

$$y' = \frac{g(x).h'(x) - h(x).g(x)'}{[g(x)]^2}$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = \frac{5+x^4}{x^3}$

2) $y = \frac{3x-2}{x}$

الحل:

1) $y' = \frac{(x^3)(4x^3)-(5+x^4)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{4x^6-15x^2-3x^6}{x^6}$

2) $y' = \frac{x(3)-(3x-2)(1)}{x^2} = \frac{3x-3x+2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$

7- مشتقة دالة مرفوعة إلى قوة:

تفاضل دالة داخل قوس = تفاضل القوس x تفاضل ما بداخل القوس

اذا كانت لدينا الدالة

$$y = [h(x)]^k$$

حيث k ثابت

فإن مشتقتها

$$y' = k.[h(x)]^{k-1}.h'(x)$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = (2x^3 - 5)^7$

2) $y = (5x + 9)^3$

الحل:

1) $y' = 7(2x^3 - 5)^6(6x^2)$

2) $y' = 3(5x + 9)^2(5) = 15(5x + 9)^2$

8- مشتقة الدالة الاسية:

اذا كانت لدينا الدالة الاس $y = e^{h(x)}$ حيث e ثابت

فإن مشتقتها $y' = e^{h(x)} . h'(x)$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = e^{-2x^3}$

2) $y = e^{-2x^3+2x}$

الحل:

1) $y' = e^{-2x^3}(-6x^2) = -6x^2 e^{-2x^3}$

2) $y' = e^{-2x^3+2x}(-6x^2 + 2)$

9- مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

اذا كانت لدينا الدالة اللوغاريتمية التالية:

$$y = \ln h(x)$$

يعبر عن اللوغاريتم باستخدام الاختصار ln أو log

فإن مشتقتها

$$y' = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال الاتية:

1) $y = \ln x^3$

2) $y = \ln(2x^4 + x^5 - 2x - 6)$

الحل:

1) $y' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

2) $y' = \frac{8x^3+5x^4-2}{2x^4+x^5-2x-6}$

المشتقات التفاضلية العليا:

في حالة اشتقاق الدالة أكثر من مرة نحصل على ما يسمى بالمشتقات التفاضلية العليا والتي يرمز لها بالرموز التالية

المشتقة التفاضلية الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$

المشتقة التفاضلية الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$

المشتقة التفاضلية الرابعة $\frac{d^4y}{dx^4} = y''''$

$\vdots$ $\vdots$

المشتقات التفاضلية العليا:

مثال: أوجد المشتقات التفاضلية الأولى والثانية والثالثة للدالة التالية

$$y = 2x^4 + x^5$$

المشتقة التفاضلية الاولى $\frac{dy}{dx} = y' = 8x^3 + 5x^4$

المشتقة التفاضلية الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 24x^2 + 20x^3$

المشتقة التفاضلية الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 48x + 60x^2$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل

هناك بعض التطبيقات الاقتصادية والإدارية الهامة للتفاضل نتناول منها ما يلى:

١) دالة التكاليف الحدية (MC) Marginal Cost = مشتقة دالة التكلفة الكلية (TC) Total Cost

٢) دالة الإيرادات الحدية (MR) Marginal Revenue = مشتقة دالة الإيرادات الكلية (TR)Total Revenue

٣) دالة الأرباح الحدية (MP) Marginal Profit = مشتقة دالة الأرباح الكلية (TP) Total Profit

مثال: إذا كانت دالة التكاليف الكلية لإنتاج Q من الوحدات لسلعة ما تأخذ الشكل التالى:

$$TC = \frac{1}{3}Q^3 + 15Q^2 + 5Q + 10$$

المطلوب: (١) أوجد دالة التكلفة الحدية (MC)

(٢) أوجد التكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المنتجة من السلعة عشرة وحدات (Q=10)

الحل: (١) دالة التكلفة الحدية (MC) = مشتقة دالة التكلفة الكلية (TC)

$$MC=(TC)'=Q^2 + 30Q + 5$$

(٢) التكلفة الحدية عند انتاج 10 وحدات هي: (بالتعويض عن Q=10 في دالة التكلفة الحدية)

$$MC=(10)^2+30(10) + 5$$

$$= 100 + 300 + 5 = 405 \text{ SR.}$$

مثال: إذا كانت دالة الايراد الكلي TR لسلعة ما تأخذ الشكل التالى:

$$TR = \frac{1}{3}Q^3 + 20Q + 30$$ (حيث Q عدد الوحدات المباعة)

المطلوب: (١) أوجد الايراد الكلي عندما يكون عدد الوحدات المباعة (Q=9)

(٢) أوجد دالة الايراد الحدي MR

(3) أوجد الايراد الحدي عندما يكون عدد الوحدات المباعة من السلعة (Q=9)

الحل

(١) الايراد الكلي عندما يكون عدد الوحدات المباعة (Q=9) (بالتعويض في دالة الايراد الكلى)

$$TR_{(Q=9)} = \frac{1}{3}(9)^3 + 20(9) + 30$$

$$= \frac{1}{3}(729) + 180 + 30 = 453\ SR.$$

(٢) دالة الايراد الحدي = مشتقة دالة الايراد الكلي

$$MR = Q^2 + 20$$

(3) الايراد الحدي عندما يكون عدد الوحدات المباعة من السلعة (Q=9) (بالتعويض في دالة الايراد الحدي)

$$y'_{(x=9)} = (9)^2 + 20 = 81 + 20 = 101\ SR.$$

تدريب: إذا كانت دالة الايراد الكلي TR لسلعة ما تأخذ الشكل التالى:

$$TR = 2Q^3 + 10Q + 20$$

(حيث Q عدد الوحدات المباعة)

المطلوب: (١) أوجد الايراد الكلي عندما يكون عدد الوحدات المباعة (Q=10)

(٢) أوجد دالة الايراد الحدي MR

(3) أوجد الايراد الحدي عندما يكون عدد الوحدات المباعة من السلعة (Q=10)

الاجابه

(١) الايراد الكلي عندما يكون عدد الوحدات المباعة (Q=10) (بالتعويض في دالة الايراد الكلى)

(٢) دالة الايراد الحدي MR = مشتقة دالة الايراد الكلي

(3) الايراد الحدي عندما يكون عدد الوحدات المباعة من السلعة (Q=10) (بالتعويض في دالة الايراد الحدي)

الوحدة السادسة: المتواليات وتطبيقاتها

- أهداف الوحدة:

بنهاية هذه الوحدة ستكون قادرا على:

- ❑ تعريف المتواليات العددية.
- ❑ التمييز بين المتوالية الحسابية والهندسية
- ❑ إيجاد مجموع وأي حد بالمتوالية.
- ❑ توظيف المتواليات الحسابية في حل بعض المشكلات المالية والإدارة والاقتصادية.

- ساعات الاتصال:٣ساعات

- محتويات الوحدة:

- ❑ تعريف المتوالية.
- ❑ القواعد الأساسية في حسابات المتواليات الحسابية والهندسية.
- ❑ التطبيقات الاقتصادية والإدارية للمتواليات الحسابية والهندسية.

- المرجع: من ص ٢٧٣- ص ٢٩٢

أولا: المتوالية الحسابية

- تعرف المتوالية الحسابية بانها مجموعة مرتبة من الاعداد (الحدود) ، بحيث ان الفرق بين أى حدين متتاليين يساوى عدد ثابت ويسمى هذا الفرق بأساس المتوالية.
- **أساس المتوالية (r)= الفرق بين أى حدين متتاليين**
- فلو كان لدينا المتوالية الاتية اساسها(r) : $[a_1,a_2,a_3.........a_n]$ فان

a_1 الحد الأول

a_2 الحد الثاني $= a_1+r$

a_3 الحد الثالث $= a2 +r$

a_n الحد النونى (الحد العام للمتوالية) $= a_{n-1}+ r$

n عدد الحدود

أولا : المتوالية الحسابية: المفهوم

تمرين: حدد أي من المتواليات التالية حسابية او متواليات غير حسابية:

1) **3, 6, 9, 12**

2) **4, 6, 9, 10**

3) **5, 10, 15, 20**

قوانين المتوالية الحسابية

قانون حساب الحد العام وأى حد بالمتوالية

- توجد حالتان
- الاولى : بمعلومية الحد السابق للحد المطلوب واساس المتوالية:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

ثانيا: بمعلومية الحد الاول واساس المتوالية:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

حيث

a_1 الحد الأول

a_n الحد النونى (الحد العام للمتوالية)

n عدد الحدود

قانون حساب مجموع المتوالية

- $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

- S_n مجموع المتوالية
- a_1 الحد الأول
- a_n الحد النونى (العام) للمتوالية
- n عدد الحدود

تمرين (١) اذا كان لديك المتوالية الحسابية الاتية: [3,7,11,15,19,23,27]
المطلوب حساب كلا من: ١- أساس المتوالية ٢- الحد العاشر والحد الخامس عشر
٣- مجموع المتوالية

١- أساس المتوالية

لإيجاد اساس المتوالية الحسابية نوجد الفرق بين أي حدين متتاليين

$r= a_2-a_1 = 7-3=4$

$r= a_3-a_2=11-7=4$

- اذن اساس المتوالية هو ٤

٢- الحد العاشر والحد الخامس عشر

- الحد العاشر a_{10}

$a_n = a_1 +(n-1)*r$

$a1=3, \quad n = 10, \quad r= 4$

$a_{10} = 3 +(10-1)*4$

$= 3 +(9)*4 = 39$

الحد الخامس a_{15}

$a_n = a_1 +(n-1)*r$

$a1=3, \quad n = 15, \quad r= 4$

$a_{15} = 3 +(15-1)*4$

$= 3 +(14)*4 = 59$

٣- مجموع المتوالية

مجموع المتوالية

$S_n =\frac{n}{2} (a_1 +a_n)$

$a_1 = 3, a_n = 27, n = 7$

$S_n =\frac{7}{2} (3 +27)$

$= 3.5 * 30 = 105$

تطبيقات المتواليات الحسابية: الفائدة البسيطة

يمكن استخدام اساسيات المتواليات الحسابية في حساب الفائدة البسيطة، كما يمكن استخدامها في تقدير معدل الفائدة والفترة الزمنية وجملة المبالغ في نهاية الفترة الزمنية

- يمكن حساب مقدار الفائدة (I) خلال فترة زمنية معينة بالمعادلة التالية

$$I = \frac{M * r * t}{100}$$

حيث

I مقدار الفائدة

M مقدار المبلغ الأصلى

r معدل الفائدة

t الفترة الزمنية (بالسنوات)

- جملة المبلغ (CA) = مقدار المبلغ الأصلى (M) + مقدار الفائدة (I)

$$CA = M + I$$

تمرين (٢) أودع شخص مبلغ قدره 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10 % سنوياً

المطلوب: ١- حساب مقدار الفائدة بعد مرور ثلاثة سنوات

٢- جملة المبلغ المستحق بعد ثلاثة سنوات

الاجابة

١- مقدار الفائدة بعد ٣ سنوات

مقدار المبلغ الأصلى M = ٢٠٠٠

معدل الفائدة r = 10%

الفترة الزمنية t = ٣

$$I = \frac{M * r * t}{100}$$

$$I = \frac{2000*10*3}{100} = 600 \text{ RS}$$

٢- جملة المبلغ بعد ثلاثة سنوات

- جملة المبلغ CA = مقدار المبلغ الأصلي M + مقدار الفائدة I

CA = M + I

=2000 +600 =2600 Rs

تمرين (٣) أودع شخص مبلغ قدره 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10 % سنوياً

وكان مقدار الفائدة ٨٠٠ ريال

المطلوب: أحسب الفترة الزمنية t المستغرقة على إيداع المبلغ

الاجابة

M=2000 SR

r = 10%

I =800 SR

- لحساب الفترة الزمنية نستخدم الصيغة التالية:

$$t = \frac{I * 100}{M * r}$$

$$t = \frac{800 * 100}{2000 * 10} = 4 \text{ year}$$

تمرين (٤) أودع شخص مبلغ قدره 3000 ريال في احد وكان مقدار الفائدة 900 وذلك بعد مرور ٥ سنوات

المطلوب: أحسب معدل الفائدة

الاجابة

M=٣000 SR

I = 900

t =5 year

- لحساب معدل الفائدة السنوى نستخدم الصيغة التالية:

$$r = \frac{I * 100}{M * t}$$

$$r = \frac{900 * 100}{3000 * 5} = 6\%$$

ثانيا : المتوالية الهندسية

- تعرف المتوالية الهندسية بانها مجموعة مرتبة من الاعداد (الحدود)، بحيث ان النسبة بين اى حد من حدود المتوالية الى الحد السابق له تكون ثابتة وتسمى هذه النسبة بأساس المتوالية.
- أساس المتوالية (r) = النسبة بين أي حد من حدود المتوالية الى الحد السابق له

فلو كان لدينا المتوالية الاتية : $[a_1,a_2,a_3.........a_n]$ والتي اساسها(r) فان،

a_1 الحد الأول

a_2 الحد الثاني $= a_1*r$

a_3 الحد الثالث $= a_2 *r$

a_n الحد النونى (الحد العام للمتوالية) $= a_{n-1}* r$

n عدد الحدود

المتوالية الهندسية: تمرين 1

تمرين: حدد أي من المتواليات التالية متواليات هندسية

1) 3, 6, 12, 24, 48

2) 2, 4, 12, 60

3) 60, 30, 15

قوانين المتوالية الهندسية

- قانون حساب الحد العام وأى حد من حدود المتوالية
  - **توجد حالتان**
    - **الاولى : بمعلومية الحد السابق للحد المطلوب واساس المتوالية:**

$$a_n = a_{n-1} * r$$

    - **ثانيا: بمعلومية الحد الاول واساس المتوالية:**

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

حيث

a_1 الحد الأول

a_n الحد النونى (الحد العام للمتوالية)

r اساس المتوالية

n عدد الحدود

تمرين (٢) اذا كان لديك متوالية هندسيه حدها الأول (a_1) يساوى ٤ واساسها (r) يساوى (3)
المطلوب حساب كلا من: ١- الحد الثالث ٢- الحد الرابع

المعطيات

r= 3

a_1=4

N = 4

n عدد الحدود

المطلوب

a_3 الحد الثالث

a_4 الحد الرابع

١- الحد الثالث

- الحد الثالث a_3
- وفقا للمعطيات فان

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$a_3 = 4 * 3^{3-1}$$

$$= 4 * 3^2$$

$$= 4 * 9 = 36$$

٢- الحد الرابع

بمعلومية ان

$$a_3 = 36$$

- نستخدم القانون التالى

$$a_n = a_{n-1} * r$$

$$a_4 = a_3 * r$$

$$a_4 = 36 * 3 = 108$$

تمرين (٣) أودع شخص مبلغ قدره (٤٠٠٠) ريال في احد البنوك بفائدة مركبة بمعدل فائدة قدره (7%)

المطلوب: احسب جملة المبلغ المودع بعد مرور (٤٨) شهراً

المعطيات

- جملة المبلغ (CA)

$$CA = M(1+r\%)^{t}$$

M مقدار المبلغ الأصلي = 4000

r معدل الفائدة = 7 %

t الفترة الزمنية = (٤٨) شهر نحولها لسنوات بالقسمة على 12 عدد شهور السنة

$$t = \frac{48}{12} = ٤ \text{ سنه}$$

جملة المبلغ المودع

$$CA = M(1+r\%)^{t}$$

$$= 4000(1+\frac{7}{100})^{4}$$

$$= 4000\,(1.07)^{4}$$

$$= 4000(\,1.311)$$

$$= 5244 \text{ RS}$$